www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

INSEEC

Concours 90
12 mai

MATHÉMATIQUES
Voies économique et technologique

DURÉE : 4 HEURES
Coefficient 5

EXERCICE I

On donne le tableau à double entrée, relatif à l'étude de la série double suivante : individus classés en pourcentage sous les deux caractères : poids et taille

x désigne le poids en kilogrammes

y la taille en centimètres

y \ x	$40 \leqslant x < 45$	$45 \leqslant x < 50$	$50 \leqslant x < 55$	$55 \leqslant x < 60$
$150 \leqslant y < 155$	20	9	1	0
$155 \leqslant y < 160$	2	18	4	1
$160 \leqslant y < 165$	0	5	12	6
$165 \leqslant y < 170$	0	1	7	14

1° Représenter graphiquement cette série par un nuage de points.

2° Calculer le coefficient de corrélation (le résultat sera donné à 10^{-3} près).

EXERCICE II

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel u_0 et par la relation : $u_{n+1} = e^{1-u_n}$ pour tout entier naturel n.

On note d'autre part $V_n = u_{2n}$, $W_n = u_{2n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $g : \begin{matrix}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto e^{1-x}\end{matrix}$

1° — Montrer que l'équation $e^{1-x} = x$ n'admet dans $\mathbb{R}$ qu'une seule solution, la déterminer, que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2° — Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 = 1$

3° — On supposera dans la suite de l'exercice que $u_0 \neq 1$

On considère la fonction h : $\begin{matrix}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto gog(x)-x\end{matrix}$ soit $h(x) = \exp\left[1-\exp(1-x)\right] - x$

a — Démontrer que la fonction φ : $\begin{matrix}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 2-x-e^{1-x}\end{matrix}$ ne prend que des valeurs négatives sur $\mathbb{R}$

b — En déduire les variations de la fonction h

4° — Démontrer que les deux suites $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées et en déduire qu'elles convergent (on comparera u_0 et 1).

5° — Déterminer la limite de ces deux suites, en déduire celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

EXERCICE III

Préliminaire

1° — Démontrer que la fonction $\begin{matrix}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^3\end{matrix}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

On prouve ainsi l'existence de la fonction racine cubique $\begin{matrix}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \sqrt[3]{x}\end{matrix}$

On rappelle cependant que l'expression $x^{1/3}$ n'est définie que pour un réel strictement positif et que néanmoins si x est strictement négatif on peut écrire $-\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-x} = (-x)^{1/3}$

2° —

a — Etant donné un réel strictement positif ϵ et x un réel strictement supérieur à -1

Calculer : $\displaystyle\int_{-1+\epsilon}^{x} \frac{dt}{\sqrt[3]{1+t}}$

Suite : page suivante

b — Soit y un réel strictement inférieur à $-\frac{1}{2}$ calculer : $\int_{2y}^{-1-\epsilon} \frac{dt}{\sqrt[3]{1+t}}$

On considère la fonction numérique F de variable réelle x définie par :

$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$ où $f(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+t^3}}$

Partie I

On se propose de déterminer l'ensemble de définition de la fonction F noté D.

1° — Montrer que D contient l'ensemble $]-\infty,-1[\cup]-\frac{1}{2},+\infty[$

2° —

a — Pour tout réel x strictement positif démontrer que : $\int_x^{2x} \frac{dt}{1+t} < \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^3}} < \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$

b — En déduire la limite de la fonction F en $+\infty$

c — Pour tout réel x strictement inférieur à -1 démontrer que : $\int_x^{2x} \frac{dt}{t} < \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^3}} < \int_x^{2x} \frac{dt}{1+t}$

d — En déduire la limite de la fonction F en $-\infty$

3° —

c — On considère un réel t appartenant à $]-1,-\frac{1}{2}]$

Remarquer que : $\sqrt[3]{1+t^3} = \sqrt[3]{1+t} \times \sqrt[3]{1-t+t^2}$ et utiliser les variations de la fonction $t \mapsto 1-t+t^2$ pour démontrer que :

$$\frac{-1}{\sqrt[3]{1+t}} < \frac{-1}{\sqrt[3]{1+t^3}} < 0$$

b — Pour tout réel x appartenant à $]-1,-\frac{1}{2}]$ en déduire la convergence de $\int_{-1}^{x} \frac{-dt}{\sqrt[3]{1+t^3}}$

4° —

a — Pour tout réel t appartenant à $[-2,-1[$ démontrer que :

$$\frac{-1}{\sqrt[3]{1+t^3}} < \frac{-1}{\sqrt[3]{1+t}}$$

b — Pour tout réel x appartenant à $[-1,\frac{1}{2}[$ en déduire la convergence de :

$$\int_{2x}^{-1} \frac{-dt}{\sqrt[3]{1+t^3}}$$

5° — En déduire l'ensemble de définition de F

Partie II

1° — Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : u \mapsto \int_{-1}^{u} f(t)\,dt$

Justifier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et calculer $g'(x)$ pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

2° — En déduire la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,-\frac{1}{2}\}$ et la valeur de $F'(x)$ pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}\setminus\{-1,-\frac{1}{2}\}$

3° — Etudier la dérivabilité de F en -1 puis en $-\frac{1}{2}$

4° — Dresser le tableau des variations de la fonction F

5° — Donner l'allure de la courbe représentative de F

(on admettra que $F(-1) \simeq 0{,}93$ et $F(-\frac{1}{2}) \simeq -0{,}58$)

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail